数理解析研究所講究録
1097 巻 1999 年 113-125

大域体上の代数多様体の l 進 Abel–Jacobi 写像について

佐藤周友 (Kanetomo Sato)
東工大・理・学振

序

古典的大域体上の非特異射影的な代数多様体の l 進 Abel-Jacobi 写像は混合モチーフの哲学とそれに付随した幾つかの予想達によって一般に単射であろうと予想されています (§1.3 予想 5). この原稿では, 正標数の大域体の上の代数曲面で l 進 Abel-Jacobi 写像が単射である例を紹介し, その証明について解説したいと思います. この原稿を書く機会を下さいました伊原康隆先生に心より感謝申し上げます.

(0.1) まず次のような状況を考えます. $\mathbb{F}_q$ を有限体とします. $\mathfrak{X}$ を $\mathbb{F}_q$ 上 3 次元の非特異射影多様体で Soulé のクラス $\mathbf{A}(\mathbb{F}_q)$ に属するものとします ([So], §3). 例えば, 曲線の積, アーベル多様体, 単有理多様体, Fermat 超曲面がこのクラスに入ります. 射影空間への埋め込み $\mathfrak{X} \subset \mathbb{P}^N$ を一つ固定し, 必要なら体 $\mathbb{F}_q$ を有限次拡大で取り替えた上で, 次の二つの条件を満たす余次元 2 の線型部分多様体 $A \subset \mathbb{P}^N$ をとることができます (例えば [SGA7], Exp. XVII を参照):

1. A は $\mathfrak{X}$ と transversal に交わる, 即ち, $Z := A \times_{\mathbb{P}^N} \mathfrak{X}$ はスムーズで $\mathfrak{X}$ に於ける余次元が 2 である.
2. A のペンシルによって与えられる fibration $\pi : \mathfrak{X}_Z \to \mathbb{P}^1$ が $\mathbb{P}^1$ のある空でない開部分集合 U_0 の上でスムーズである. ここで $\mathfrak{X}_Z$ は $\mathfrak{X}$ の Z に沿ったブロー・アップを表す. (特異ファイバーに関しては特に条件を課しません.)

こうしてできた射 $\pi : \mathfrak{X}_Z \to \mathbb{P}^1$ の生成点上のファイバー $X := \mathfrak{X}_Z \times_{\mathbb{P}^1} \operatorname{Spec} k$ (k は $\mathbb{P}^1$ の関数体, つまり, 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の一変数有理関数体) は $\operatorname{Spec} k$ 上の非特異射影曲面ですが, この X に対して次のことが言えます.

定理 1. 任意の素数 $l \neq \mathrm{ch}(\mathbb{F}_q)$ に対して, l 進 Abel–Jacobi 写像

$$\mathrm{aj}_l^{3,2} : \mathrm{H}^3_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Z}(2))_{\mathbb{Q}_l} \to \mathrm{H}^1_{\mathrm{Gal}}(G_k, \mathrm{H}^2_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbb{Q}_l(2)))$$

は単射である.

ここで左辺の $\mathrm{H}^3_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Z}(2))$ は Bloch が定義した高次 Chow 群 $\mathrm{CH}^2(X, 1)$ で, 代数的サイクルで生成される自由アーベル群 $Z^2(X, 1)$ のある部分群 $K^2(X, 1)$ をある同値関係で割ることにより定義される群です. l 進 Abel–Jacobi 写像 $\mathrm{aj}_l^{3,2}$ の単射性は $K^2(X, 1) \otimes \mathbb{Q}_l$ から右辺の Galois コホモロジーへの写像の核が丁度その同値関係 (に $\otimes\mathbb{Q}_l$ したもの) と一致する事を主張しています. 高次 Chow 群と l 進 Abel–Jacobi 写像の定義は §1 で説明します.

定理 1 の証明において重要なのは, 出発点の $\mathbb{F}_q$ 上の多様体 $\mathfrak{X}$ の高次 Chow 群 $\mathrm{H}^3_{\mathcal{M}}(\mathfrak{X}, \mathbb{Z}(2))$ の有限性 ([So], [GrSu]) です. これによって多様体 $\mathfrak{X}_Z \times_{\mathbb{P}^1} U_0$ の高次 Chow 群 $\mathrm{H}^3_{\mathcal{M}}(\mathfrak{X}_Z \times_{\mathbb{P}^1} U_0, \mathbb{Z}(2))$ は $\mathrm{ch}(\mathbb{F}_q)$-準素部分を無視して有限生成アーベル群である事がわかります ([Sat], (6.2) 参照). 定理 1 はこの事実と次の (0.2) で述べられる主結果 (定理 2) から従います.

筆者は日本学術振興会特別研究員制度 (PD) の援助を受けております.

(0.2) ここでは次の一般的な状況を考えます. k を有限体上の一変数関数体とします. 一般論により有限体上の非特異射影曲線で関数体が k であるようなものが同型を除いて一意に存在しますが, これを C で表すことにします. l を k の標数と異なる素数, X を k 上の勝手な非特異完備多様体とします. この時, C のある空でない開部分集合 U_0 上に X の固有 (proper) かつスムーズなモデル $\mathfrak{X}_0$ (即ち U_0 上固有かつスムーズなスキームで Spec k 上のファイバーが X であるようなもの) が取れます. (0.1) の状況では $\mathfrak{X}_Z \times_{\mathbb{P}^1} U_0$ がこの $\mathfrak{X}_0$ に相当します.

定理 2 ([Sat] **Theorem 0.2**). (0.2) の状況で, l 進 Abel-Jacobi 写像

$$\mathrm{aj}_l^{3,2} : \mathrm{H}^3_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Z}(2))_{\mathbb{Q}_l} \to \mathrm{H}^1_{\mathrm{Gal}}(G_k, \mathrm{H}^2_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbb{Q}_l(2)))$$

の核は $(\mathrm{H}^3_{\mathcal{M}}(\mathfrak{X}_0, \mathbb{Z}(2)) \otimes \mathbb{Z}_l)_{l\text{-Div}} \otimes \mathbb{Q}$ の商である. 但しアーベル群 M に対し $M_{l\text{-Div}}$ は最大 l-加除部分群を表す. 従って, 高次 Chow 群 $\mathrm{H}^3_{\mathcal{M}}(\mathfrak{X}_0, \mathbb{Z}(2))$ が (少なくとも ch(k)-準素部分を無視して) 有限生成アーベル群であるならば写像 $\mathrm{aj}_l^{3,2}$ は単射である.

この原稿の構成は次の通りです. §1 では高次 Chow 群とサイクル写像について概説し, 定理 2 の証明のポイントについて述べます. §2 では定理 2 の証明と深く関わるサイクル写像の像に関する問題とそれについて知られている結果を紹介します. §3 では定理 2 の証明の技術的な核となっている局所体上の多様体のエタールコホモロジーに関する有限性定理を紹介します.

Contents

(0.3) **記号.** Abel 群 M と正の整数 n に対して, ${}_nM$ と M/n は各々, n 倍写像 $M \overset{\times n}{\to} M$ の核と余核を表します. $M\{l\}$ は M に含まれる l-準素なねじれ元から成る部分群, $M_{l\text{-Div}}$ は M の最大 l-加除部分群を表す.

体 k に対し, k の分離閉包を一つ固定し $\overline{k}$ で表します. G_k は絶対 Galois 群 Gal$(\overline{k}/k)$ を表します. k 上の多様体 X に対して $\overline{X}$ は係数拡大 $X \otimes_k \overline{k}$, $k(X)$ は関数体を表します.

スキーム X 上で可逆な正の整数 r に対して, μ_r は 1 の r 乗根のなすエタール層, 正の整数 n に対して, $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}(n)$ はエタール層 $(\mu_r)^{\otimes n}$ を表します. X 上で可逆な素数 l に対し, $\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n)$ は $\varinjlim_\nu \mathbb{Z}/l^\nu\mathbb{Z}(n)$ を表します. 非負な整数 i に対して,

$$\mathrm{H}^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_l(n)) := \varprojlim_\nu \mathrm{H}^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/l^\nu\mathbb{Z}(n))$$

と置きます.

(0.2) の状況では, X に対し次の様な l 進コホモロジーを考えます.

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{ind}}(X, \mathbb{Z}_l(n)) := \varinjlim_{U \subset U_0:\ \mathrm{open}} \mathrm{H}^i_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_U, \mathbb{Z}_l(n)).$$

ここで, $\mathfrak{X}_U$ は $\mathfrak{X}_0 \times_{U_0} U$ を表します. $\mathrm{H}^i_{\mathrm{ind}}(X, \mathbb{Z}_l(n))$ はモデル $\mathfrak{X}_0$ の取り方によらない $\mathbb{Z}_l$-加群になります ([EGA4], 8.8.2.5). この l 進コホモロジーを導入する利点を1つ挙げると, Hochschild–Serre のスペクトル系列:

$$E_2^{p,q} = \mathrm{H}^p_{\mathrm{ind}}(k, \mathrm{H}^q_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbb{Z}_l(n))) \Longrightarrow \mathrm{H}^{p+q}_{\mathrm{ind}}(X, \mathbb{Z}_l(n)) \tag{0.3.1}$$

が存在するという点です. ここで左辺は

$$\mathrm{H}^p_{\mathrm{ind}}(k, \mathrm{H}^q_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbb{Z}_l(n))) := \varinjlim_{U \subset U_0:\ \mathrm{open}} \mathrm{H}^p_{\text{ét}}(U, R^q(\pi_U)_* \mathbb{Q}_l(n))$$

で定義され, π_U は構造射 $\mathfrak{X}_U \to U$ を表します. スペクトル系列 (0.3.1) によって引き起こされる $\mathrm{H}^i_{\mathrm{ind}}(X, \mathbb{Z}_l(n))$ のフィルター付けを $\mathrm{F}^\bullet$ で表します.

1. 高次 Chow 群とサイクル写像

Chow 群は Weil 因子類群の高次元化として位置付けられますが, Bloch [B1] によりそれはさらに高次 Chow 群へと一般化されました. 体上の smooth な多様体の通常の Chow 群がベクトル束の同型類の Grothendieck 群を近似するように, 高次 Chow 群は高次代数的 K 群を近似することが知られています. この節では, 高次 Chow 群とサイクル写像の定義について述べます. また l 進 Abel–Jacobi 写像の定義についても述べ, その後で定理 2 の証明の骨子を述べます. その細部は §2 以降で解説します.

1.1. **高次 Chow 群.** 体 k 上の多様体 X と非負な整数 q, n に対して, X の高次 Chow 群 $\mathrm{CH}^n(X, q)$ は以下で定義される (ホモロジー的に番号付けされた) サイクルの複体 $Z^n(X, *)$ のホモロジー群として定義されます:

$$\mathrm{CH}^n(X, q) := \mathrm{H}_q(Z^n(X, *))$$

で定義されます. $q = 0$ のときは通常の Chow 群 $\mathrm{CH}^n(X)$ に一致します.

まず記号を少し準備します. $\{\Delta^m\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ を k 上の standard cosimplicial scheme とします. 簡単に復習すると, 各 m に対する

$$\Delta^m := \mathrm{Spec}\ k[x_0, \ldots, x_m]/(x_0 + x_1 + \cdots + x_m - 1)$$

というアフィンなスキームと, 面写像と呼ばれる埋め込み

$$\partial(s) : \Delta^{m'} \to \Delta^m$$

$(m' < m)$ 達の組です. ここで s は順序集合の単調増加写像

$$s : \{0, 1, \ldots, m'\} \to \{0, 1, \ldots, m\}$$

を表し $\partial(s)$ は各 s に対して定義されています. 面写像の正確な定義は省略しますが, 例えば Δ^0 から Δ^1 への面写像には ∂_0 と ∂_1 の二つがあり, 各々 $\Delta^0 = \mathrm{Spec}\ k$ を Δ^1 上の点 $(x_0, x_1) = (0, 1)$, $(1, 0)$ に写す写像です. Δ^m は 位相幾何でいうところの標準 m 単体 $\Delta_m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ の代数的な類似です. Δ^m への各面写像の像を Δ^m の面 (face) と呼びます.

X を体 k 上の多様体とします. 非負な整数 n, q を一つずつ固定して群 $Z^n(X, q)$ を次の条件 $(*)$ を満たす $X \times \Delta^q$ の既約な余次元 n の閉部分多様体 Z 達が生成する自由アーベル群として定義します.

$(*)$ Z は Δ^q の全ての面と正しい余次元で交わる. つまり, 勝手な面 $\partial(\Delta^{q'})$ に対して交叉 $Z \cap \partial(\Delta^{q'})$ が $\partial(\Delta^{q'})$ に於いて余次元 n である.

今度は n だけを固定して q を動かし $Z^n(X,*)$ という複体を作ります. $\{\Delta^m\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ の $(q-1)$ 番目から q 番目 には q 個の面写像

$$\partial_i : \Delta^{q-1} \to \Delta^q$$

$(i=0,1,\ldots,q)$ があるので, q 番目から $(q-1)$ 番目への境界写像 ∂^* を

$$\partial^* := \Sigma_{i=0}^{q} \partial_i^* : Z^n(X,q) \to Z^n(X,q-1)$$

と定義します. ここで, 各 ∂_i^* は交叉理論を使って定義されますが, サイクルが上の $(*)$ を満たしているので well-defined です. また交叉積の可換性を使った簡単な計算により, 得られたアーベル群の列 $(Z^n(X,*),\partial^*)$ が複体になっていることが分かります. これで複体 $Z^n(X,*)$ が定義されました.

以下では次の様に書き換えて話を進めることにします:

$$\mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(X,\mathbb{Z}(n)) := \mathrm{CH}^n(X,2n-i).$$

わざわざこう書きかえる理由は次で述べるサイクル写像によって明らかになります.

1.2. **サイクル写像.** X を体 k 上のスムーズな多様体, l を k で可逆な素数とします. このとき, 高次 Chow 群からエタールコホモロジー群へ, 適当な関手性を満たす自然なサイクル写像があります:

$$\mathrm{cl}^{i,n} : \mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(X,\mathbb{Z}(n)) = \mathrm{CH}^n(X,2n-i) \to \mathrm{H}^i_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}/l^\nu\mathbb{Z}(n)). \tag{1.1}$$

$i=2n$ の場合, これは通常のサイクル写像

$$\mathrm{cl}^n : \mathrm{CH}^n(X) \to \mathrm{H}^{2n}_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}/l^\nu\mathbb{Z}(n))$$

に他なりません. ここでは $i=3$, $n=2$ の場合についてサイクル写像 $\mathrm{cl}^{3,2}$ の定義を説明します (一般的の場合は [B2], §4 を参照).

$$K^2(X,1) := \mathrm{Ker}(\partial^* : Z^2(X,1) \to Z^2(X,0))$$

と置いて, 次の二つを行えば十分です.

1. 準同型写像
$$c : K^2(X,1) \to \mathrm{H}^3_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}/l^\nu\mathbb{Z}(2))$$
を定義する.
2. 写像 c が $\partial^* : Z^2(X,2) \to K^2(X,1)$ の像を 0 に写す事を示す.

2 はエタールコホモロジーのホモトピー不変性によって証明されますが, 詳細は省略し, 以下では 1 について説明します.

Step 1. 次の完全列の図式を可換にするような標準写像 c', c'' を構成するのが目標です.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K^2(X,1) \arrow[r] & Z^2(X,1) \arrow[r, "\partial^*"] \arrow[d, "c'"] & Z^2(X,0) \arrow[d, "c''"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^3_{W^1}(X,2) \arrow[r] & \bigoplus_{x\in X^1} \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(x,\mathbb{Z}/l^\nu\mathbb{Z}(1)) \arrow[r] & \bigoplus_{x\in X^2} \mathbb{Z}/l^\nu\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

但し, ここで正の整数 q に対し

$$\mathrm{H}^3_{W^q}(X,2) := \varinjlim_{Z\subset X:\ \text{closed of codim.}\geq q} \mathrm{H}^3_{Z,\text{ét}}(X,\mathbb{Z}/l^\nu\mathbb{Z}(2)),$$

と置きました. 上の可換図式が完成すれば c' が誘導する写像と標準写像の合成:

$$K^2(X,1) \to \mathrm{H}^3_{W^1}(X,2) \to \mathrm{H}^3_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}/l^\nu\mathbb{Z}(2))$$

によって欲しい写像 c を定義できます．上の図式を構成します．まず，下の段はエタールコホモロジーの localization と smooth purity による完全列で，最初の単射性は purity: $\mathrm{H}^3_{W^2}(X,2)=0$ から従います．また写像 c'' は X 上の余次元 2 のサイクルを単純に mod l^ν する写像です．従って，残っているのは右の四角を可換にするような中央の写像 c' の定義です．

Step 2. 可換性に留意しつつ，$Z^2(X,1)$ の既約なサイクル達の c' による行き先を決めてしまえば線型に延長して準同型 c' ができます．そこで，§1.1 で述べた条件 $(*)$ を満たすような余次元 2 の既約な閉部分多様体 $Z \subset X \times \Delta^1$ を任意に固定します．射影 $\mathrm{pr}_1 : X \times \Delta^1 \to X$ による Z の像を D とします．D の X での閉包を D' とします．D' の X での余次元 は 1 か又は 2 です．もし，D の X での余次元が 2 ならば $c'(Z)=0$ と定義します (実際，この場合 $Z \simeq D \times \Delta^1$, $D = D'$ となり $\partial^*(Z) = D - D = 0$ ですので，この Z での可換性は自明です)．

以下では Z を，D' の X での余次元が 1 であるようなものとし，サイクル Z から，$Z^2(X,0)$ に於いて

$$\mathrm{div}_{D'}(f_Z) = \partial^*(Z) \tag{1.2}$$

となるような D' 上の有理関数 f_Z を構成します．もしこのような f_Z が構成されたならば，f_Z の $k(D)^\times/l^\nu \simeq \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(k(D), \mathbb{Z}/l^\nu\mathbb{Z}(1))$ へのクラスを以って $c'(Z)$ と定義することで Z に対する上の図式の可換性が成り立ちます．さて，Δ^1 から $\mathbb{P}^1 = \mathrm{Proj}\ k[y_0, y_1]$ への開な埋め込み

$$j : \Delta^1 \to \mathbb{P}^1$$

を $(j \circ \partial_0)(\Delta^0) = (0:1)$, $(j \circ \partial_1)(\Delta^0) = (1:0)$, 補集合が $(1:1)$ となるようにとります．Z' を Z の $X \times \mathbb{P}^1$ での閉包とします．$\mathbb{P}^1$ の点 $(1:0)$ を ∞, 点 $(0:1)$ を O で表すことにして，次を証明します．

主張 3. 合成写像 $g : Z' \subset X \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ による点 ∞ の逆像 $g^{-1}(\infty)$ は Z' 全体ではない．従って，同型 $\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\} \simeq \mathrm{Spec}\,[t]$ を $t \mapsto y_0/y_1$ で決める事により g を Z' 上の有理関数とみなすことができる．さらに，$f_Z := N_{k(Z)/k(D)}(g)$ と置くと等号(1.2) が成り立つ．

この主張を示せば準同型写像 c' が構成できて，従って我々が求める c も構成できたことになります．

Step 3. 主張 3 を証明します．最初の主張は Z が $X \times \Delta^1$ の面 $X \times \{\infty\}$ と正しい余次元で交わるという条件から従います．次に $f_Z := N_{k(Z)/k(D)}(g)$ に対して等号(1.2) を証明します．次の様に射に記号をつけます:

$$\begin{array}{ccc}
Z' & \xrightarrow{\tilde{g}} & Z' \times \mathbb{P}^1 \\
{\scriptstyle \mathrm{id.}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\
Z' & \longrightarrow & X \times \mathbb{P}^1 \\
{\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1} \\
D' & \longrightarrow & X.
\end{array}$$

但し $\tilde{g}$ は g のグラフ射，π は標準射を表します．この図式の全ての射は固有 (proper) である事に注意します．さて，射 h は固有であるので，

$$\mathrm{div}_{D'} \circ N_{k(Z)/k(D)}(g) = h_* \circ \mathrm{div}_{Z'}(g)$$

が成り立ちます．従って

$$h_* \circ \mathrm{div}_{Z'}(g) = \partial^*(Z)$$

を示せば十分です. 実際, この等式は交叉積の射影公式等から従います. つまり, g のグラフを $\Gamma_g \subset Z' \times \mathbb{P}^1$, 射影 $Z' \times \mathbb{P}^1 \to Z'$ を $p_{Z'}$ で表すことにして

$$\begin{aligned} h_* \circ \mathrm{div}_{Z'}(g) &= h_* \circ g^*(\{O\} - \{\infty\}) = h_* \circ \tilde{g}^*(Z' \times \{O\} - Z' \times \{\infty\}) \\ &= (h \circ p_{Z'})_*(\Gamma_g.(Z' \times \{O\} - Z' \times \{\infty\})) \\ &= (\mathrm{pr}_1 \circ \pi)_*(\Gamma_g.(Z' \times \{O\} - Z' \times \{\infty\})) \\ &= (\mathrm{pr}_1)_*(\pi_*(\Gamma_g.\pi^*(X \times \{O\} - X \times \{\infty\}))) \\ &= (\mathrm{pr}_1)_*(\pi_*(\Gamma_g).(X \times \{O\} - X \times \{\infty\})) \\ &= (\mathrm{pr}_1)_*(Z'.(X \times \{O\} - X \times \{\infty\})) \\ &= \partial^*(Z) \end{aligned}$$

となります. これで主張 3 の証明を完了します.

1.3. l 進 Abel–Jacobi 写像. ここでは, (0.2) の状況を考えます. まず, 各 $U \subset U_0$ 上のモデル $\mathfrak{X}_U := \mathfrak{X}_0 \times_{U_0} U$ に対して, サイクル写像

$$\mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(\mathfrak{X}_U, \mathbb{Z}(n)) \to \mathrm{H}^i_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_U, \mathbb{Z}_l(n))$$

を §1.2 の $\mathrm{cl}^{i,n}$ の (ν に関する) 逆極限とします. X の $\mathbb{Q}_l$-係数のサイクル写像

$$\mathrm{reg}_l^{i,n} : \mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Z}(n))_{\mathbb{Q}_l} \to \mathrm{H}^i_{\mathrm{ind}}(X, \mathbb{Q}_l(n))$$

を, $\mathfrak{X}_U$ 達のサイクル写像の順極限

$$\mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Z}(n)) \simeq \varinjlim_{U \subset U_0:\ \text{open}} \mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(\mathfrak{X}_U, \mathbb{Z}(n)) \to \mathrm{H}^i_{\mathrm{ind}}(X, \mathbb{Z}_l(n))$$

の線型拡大として定義します.

(0.1) で述べた l 進 Abel–Jacobi 写像を定義するには次の補題が必要です.

補題 4. スペクトル系列 (0.3.1) において, $p \geq 3$ であるか, 又は '$p = 0$ かつ $q \neq 2n$' であれば $E_2^{p,q} \otimes \mathbb{Q} = 0$ が成り立つ. 従って $(p,q) \neq (0,2n), (2,2n-1)$ ならば

$$E_2^{p,q} \otimes \mathbb{Q} \simeq E_\infty^{p,q} \otimes \mathbb{Q}$$

が成り立つ.

この補題は U のコホモロジー次元が 2 であるという事実と Deligne による Weil 予想の証明 ([D], 3.3.9), 及び proper smooth base change theorem から従います ([Sat], Lemma 1.1 参照).

$i < 2n$ の場合, 補題 4 によって,

$$\mathrm{F}^3\mathrm{H}^i_{\mathrm{ind}}(X, \mathbb{Q}_l(n)) = 0, \ \ \mathrm{gr}^0\mathrm{H}^i_{\mathrm{ind}}(X, \mathbb{Q}_l(n)) = 0,$$

であって, $p = 1, 2$ に対して

$$\mathrm{gr}^p_{\mathrm{F}}\mathrm{H}^i_{\mathrm{ind}}(X, \mathbb{Q}_l(n)) \simeq \mathrm{H}^p_{\mathrm{ind}}(k, \mathrm{H}^{i-p}_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbb{Q}_l(n)))$$

となります. そこで, l 進 Abel–Jacobi 写像

$$\mathrm{aj}_l^{i,n} : \mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Z}(n))_{\mathbb{Q}_l} \to \mathrm{H}^1_{\mathrm{Gal}}(G_k, \mathrm{H}^{i-1}_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbb{Q}_l(n)))$$

を次の合成写像で定義します:

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Z}(n))_{\mathbb{Q}_l} &\xrightarrow{\mathrm{reg}_l^{i,n}} \mathrm{H}^i_{\mathrm{ind}}(X, \mathbb{Q}_l(n)) = \mathrm{F}^1\mathrm{H}^i_{\mathrm{ind}}(X, \mathbb{Q}_l(n)) \\ &\to \mathrm{gr}^1_{\mathrm{F}} \simeq \mathrm{H}^1_{\mathrm{ind}}(k, \mathrm{H}^{i-1}_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbb{Q}_l(n))) \xrightarrow{\subset} \mathrm{H}^1_{\mathrm{Gal}}(G_k, \mathrm{H}^{i-1}_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbb{Q}_l(n))). \end{aligned}$$

最後の写像は Galois コホモロジーの inflation 写像で, 一般論により単射です.
$i=2n$ の場合も,

$$\mathrm{H}^{2n}_{\mathcal{M}}(X,\mathbb{Z}(n))_{\mathrm{hom}} := \mathrm{Ker}\left(\mathrm{H}^{2n}_{\mathcal{M}}(X,\mathbb{Z}(n)) \to \mathrm{H}^{2n}_{\text{ét}}(\overline{X},\mathbb{Z}_l(n))^{G_k}\right)$$

と置くと, 上と同様の構成から l 進 Abel–Jacobi 写像

$$\mathrm{aj}_l^{2n,n} : \mathrm{H}^{2n}_{\mathcal{M}}(X,\mathbb{Z}(n))_{\mathrm{hom}} \otimes \mathbb{Q}_l \to \mathrm{H}^1_{\mathrm{Gal}}(G_k, \mathrm{H}^{2n-1}_{\text{ét}}(\overline{X},\mathbb{Q}_l(n)))$$

が定義されます. こうして l 進 Abel–Jacobi 写像が定義されましたが, この写像について次の予想があります.

予想 5 (Jannsen [J2] §12). (0.2) の状況で, $i \le 2n$ なる任意の非負な整数 i, n に対して $\mathrm{aj}_l^{i,n}$ は単射. さらにその像は $\mathrm{H}^1_{\mathrm{ind}}(k, \mathrm{H}^{i-1}_{\text{ét}}(\overline{X},\mathbb{Q}_l(n)))$ に一致する.

例 6. (0.2) の状況を考えます. $(n,i)=(1,1)$ の場合, $\mathrm{H}^1_{\mathcal{M}}(X,\mathbb{Z}(1))$ は X 上の可逆な正則関数の群 $\Gamma(X,\mathcal{O}_X^{\times}) \simeq k^{\times}$ と同型 ([B1], §6) で, 写像 $\mathrm{aj}_l^{1,1}$ は Galois symbol: $k^{\times}/l^{\nu} \simeq \mathrm{H}^1_{\mathrm{Gal}}(G_k,\mu_{l^{\nu}})$ が引き起こす写像

$$k^{\times}\otimes\mathbb{Q}_l \to \mathrm{H}^1_{\mathrm{Gal}}(G_k,\mathbb{Q}_l(1))$$

と同一視されます. 従って, $\mathrm{aj}_l^{1,1}$ は単射です ($k^{\times}$ には任意の l 冪で加除な元が無い事を使う). さらに $\mathrm{aj}_l^{1,1}$ の像が $\mathrm{H}^1_{\mathrm{ind}}(k,\mathbb{Q}_l(1))$ に一致する事も確かめられます.
$(n,i)=(1,2)$ の場合, $\mathrm{H}^2_{\mathcal{M}}(X,\mathbb{Z}(1))$ は Picard 群 $\mathrm{Pic}(X)$ と同型で, l 進 Abel–Jacobi 写像 $\mathrm{aj}_l^{2,1}$ は Picard 多様体の Kummer 列:

$$0 \to {}_{l^{\nu}}\underline{\mathrm{Pic}}^0_X(\overline{k}) \to \underline{\mathrm{Pic}}^0_X(\overline{k}) \xrightarrow{\times l^{\nu}} \underline{\mathrm{Pic}}^0_X(\overline{k}) \to 0$$

の Galois コホモロジーの境界写像 $\underline{\mathrm{Pic}}^0_X(k)/l^{\nu} \xrightarrow{\subset} \mathrm{H}^1_{\mathrm{Gal}}(G_k, {}_{l^{\nu}}\underline{\mathrm{Pic}}^0_X(\overline{k}))$ が引き起こす

$$\underline{\mathrm{Pic}}^0_X(k)\otimes\mathbb{Z}_l \to \mathrm{H}^1_{\mathrm{Gal}}(G_k, T_l(\underline{\mathrm{Pic}}^0_X(\overline{k}))) \simeq \mathrm{H}^1_{\mathrm{Gal}}(G_k, \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\overline{X},\mathbb{Z}_l(1)))$$

という写像の線型拡大と同一視されます ([Ras], Appendix). さらに k-有理点のなす群 $\underline{\mathrm{Pic}}^0_X(k)$ が ($\mathrm{ch}(k)$-準素な部分を無視して) 有限生成アーベル群である事から $\mathrm{aj}_l^{2,1}$ は単射なります.

1.4. **定理 2 の証明の概略.** (0.2) の状況を考えます. 定理 2 は, 写像 $\mathrm{aj}_l^{3,2}$ の定義により, 次の補題 7 と定理 8 の $n=2$ の場合から従います.

補題 7. X の $\mathbb{Z}_l$-係数のサイクル写像

$$\mathrm{H}^3_{\mathcal{M}}(X,\mathbb{Z}(2))_{\mathbb{Z}_l} \to \mathrm{H}^3_{\mathrm{ind}}(X,\mathbb{Z}_l(2))$$

の核は $(\mathrm{H}^3_{\mathcal{M}}(\mathfrak{X}_0,\mathbb{Z}(2))_{\mathbb{Z}_l})_{l\text{-Div}}$ の商である.

定理 8 ([Sat] §5). n を 2 以上の勝手な整数とする. このとき X の $\mathbb{Q}_l$-係数のサイクル写像

$$\mathrm{reg}_l^{n+1,n} : \mathrm{H}^{n+1}_{\mathcal{M}}(X,\mathbb{Z}(n))_{\mathbb{Q}_l} \to \mathrm{H}^{n+1}_{\mathrm{ind}}(X,\mathbb{Q}_l(n))$$

について

$$\mathrm{Im}(\mathrm{reg}_l^{n+1,n}) \cap \mathrm{F}^2\mathrm{H}^{n+1}_{\mathrm{ind}}(X,\mathbb{Q}_l(n)) = \{0\}$$

が成り立つ.

補題 7 の証明はここでは省略しますが, Merkur'ev–Suslin の定理という体の Milnor K 群と Galois コホモロジーを結び付ける定理が重要な役割を果たしています. 定理 8 の証明は §2, §3 で行います.

2. サイクル写像の像について

この節ではサイクル写像の像に関する定理 8 を一般化した次の予想について解説すると共に, 定理 8 を局所体上の多様体のサイクル写像の結果 (§3) に帰着させます.

予想 9. (0.2) の状況で, $1 \leq n \leq d+1$ かつ $2 \leq i \leq 2n$ を満たす任意の整数 i と n に対し, §1.3 で述べたサイクル写像

$$\mathrm{reg}_l^{i,n} : \mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Z}(n))_{\mathbb{Q}_l} \to \mathrm{H}^i_{\mathrm{ind}}(X, \mathbb{Q}_l(n))$$

の像は F^2 と自明に交わる (F^2 の定義は (0.3.1) を参照), 即ち

$$\mathrm{Im}(\mathrm{reg}_l^{i,n}) \cap \mathrm{F}^2\mathrm{H}^i_{\mathrm{ind}}(X, \mathbb{Q}_l(n)) = \{0\}$$

である.

ここで, $i < 2$ の場合を考えないのは, $i < 2$ ならば自動的に $\mathrm{F}^2\mathrm{H}^i_{\mathrm{ind}}(X) = 0$ であるという理由によります. 予想 9 は l 進 Abel–Jacobi 写像の単射性と深く関わっています. 実際, サイクル写像 $\mathrm{reg}_l^{i,n}$ の単射性とこの予想を認めると, l 進 Abel–Jacobi 写像の単射性 (§1.3 予想 5) が直ちに従います.

定理 10. 予想 9 は次の (0)–(5) の場合に正しい (Figure 1 を参照).

(0) $(n,i) = (1,2)$.
(1) (n,i) は任意, X が至る所 potentially good reduction を持つ.
(2) $i \leq n$.
(3) $(n,i) = (d+1, 2d+1)$.
(4) $(n,i) = (d, 2d)$.
(5) $i = 2n$, $2 \leq n \leq d-1$ (及び付加的な幾何的仮定).

§1.4 で述べた定理 8 は Figure 1 の線分 (6) に対応します.

定理 10 の証明の概略. (0) の場合は $\mathrm{aj}_l^{2,1}$ が単射であるという事実 (例 6) から従います. (5) は Raskind [Ras] の結果で, 以下で (1)–(4) の場合と合わせて解説します. C の閉点 $\mathfrak{p}$ に対して, 局所環 $\mathcal{O}_{C,\mathfrak{p}}$ の完備化の分数体を $k_\mathfrak{p}$ で表すことにします. $k_\mathfrak{p}$ は古典的な意味での局所体です. さらに $X_{k_\mathfrak{p}} := X \otimes_k k_\mathfrak{p}$ の $\mathbb{Q}_l$-係数のサイクル写像 (§1.2 のサイクル写像 $\mathrm{cl}^{i,n}$ の逆極限の $\mathbb{Q}_l$-線型拡大) を $\mathrm{reg}_{l,\mathfrak{p}}^{i,n}$ で表します:

$$\mathrm{reg}_{l,\mathfrak{p}}^{i,n} : \mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(X_{k_\mathfrak{p}}, \mathbb{Z}(n))_{\mathbb{Q}_l} \to \mathrm{H}^i_{\text{ét}}(X_{k_\mathfrak{p}}, \mathbb{Q}_l(n)). \tag{2.1}$$

右辺には Hochschild–Serre のスペクトル系列

$$E_2^{p,q} = \mathrm{H}^p_{\text{ét}}(G_{k_\mathfrak{p}}, \mathrm{H}^q_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbb{Z}_l(n))) \Longrightarrow \mathrm{H}^{p+q}_{\text{ét}}(X_{k_\mathfrak{p}}, \mathbb{Z}_l(n)) \tag{2.2}$$

によるフィルター付け $\mathrm{F}^\bullet$ が入ります.

定理 10 は次の命題 11, 定理 12, 及び定理 13 から従います. 大雑把に言うと命題 11 で 定理 10 を局所体上の, good reduction を持たないかもしれないような多様体のサイクル写像の問題 (定理 13), 及び, U_0 上の X のモデル $\mathfrak{X}_0$ のエタールコホモロジーの問題 (定理 12) に帰着させています. 因みに, k が代数体の場合に予想 9 を証明する難しさは, 特に, 定理 12 に対応する Spec $\mathbb{Z}$ 上の数論の難しさにあります.

命題 11 (Raskind, Sato). 任意の $C \setminus U_0$ の点 $\mathfrak{p}$ に対して

$$\mathrm{Im}(\mathrm{reg}_{l,\mathfrak{p}}^{i,n}) \cap \mathrm{F}^2\mathrm{H}^i_{\text{ét}}(X_{k_\mathfrak{p}}, \mathbb{Q}_l(n)) = \{0\} \tag{2.3}$$

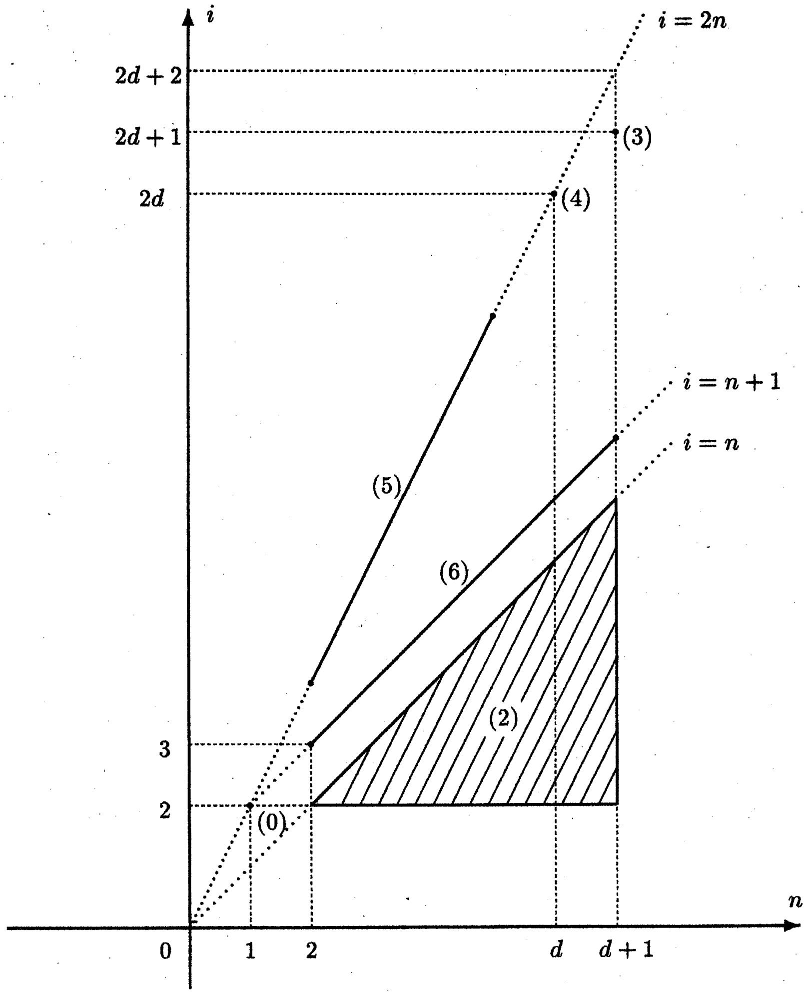

FIGURE 1

であると仮定する. 構造射 $\mathfrak{X}_0 \to U_0$ を π で表す. この時, X のサイクル写像 $\mathrm{reg}_l^{i,n}$ の像と $\mathrm{F}^2\mathrm{H}^i_{\mathrm{ind}}(X, \mathbb{Q}_l(n))$ の交わりは $\mathbb{Q}_l$ ベクトル空間

$$\mathrm{Ker}\left(a^{i,n} : \mathrm{H}^2_{\text{ét}}(U_0, R^{i-2}\pi_*\mathbb{Q}_l(n)) \xrightarrow{\mathrm{res}} \bigoplus_{\mathfrak{p}\in C\setminus U_0} \mathrm{H}^2_{\mathrm{Gal}}(G_{k_\mathfrak{p}}, \mathrm{H}^{i-2}_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbb{Q}_l(n)))\right) \tag{2.4}$$

の $\mathrm{F}^2\mathrm{H}^i_{\mathrm{ind}}(X, \mathbb{Q}_l(n))$ への像に含まれる.

証明. $i = 2n$ の場合は [Ras], Proposition 3.6, $i < 2n$ の場合は [Sat], §5 を参照. □

定理 12 (Jannsen). 式 (2.4) の写像 $a^{i,n}$ は 任意の i, n ($i \leq 2n$) で単射である.

証明. $i = 2n$ の場合は [Ras] Theorem 4.1, $i < 2n$ の場合は [J1] §6 Theorem 4 を参照. □

定理 13. K を局所体 (混標数でも良い), X を K 上の非特異完備多様体, l を K の標数とは異なる素数とする. X のサイクル写像を $\mathrm{reg}_{l,X}^{i,n}$ で表す. この時, 定理 10 の (1)–(5) の場合に ((1) は 'X が K 上で potentially good reduction を持つ' という意味で),

$$\mathrm{Im}(\mathrm{reg}_{l,X}^{i,n}) \cap \mathrm{F}^2\mathrm{H}^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_l(n)) = \{0\}$$

が成り立つ.

証明. (1) $i=2n$ の場合は [N] Theorem D (1) (3), $i<2n$ の場合は [D] Corollaire 3.3.9, と局所体の Galois コホモロジーの Tate 双対性 [S] Chap. II, §5.2 から従う.
(2) 下の Remark 14 を参照.
(3) $\dim(X)=1$ の場合が本質的で, これは [Sai], p. 64, Theorem 4.1 から従う.
(4) [Ras] Proposition 3.2 の証明の最初の部分を参照.
(5) [N] Theorem D (2) を参照. □

注意 14. K, X, l は 定理 13 の通りとします. $i \le n$ の場合に限り, 勝手な X に対して

$$\mathrm{H}^2_{\mathrm{Gal}}(G_K, \mathrm{H}^{i-2}_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbb{Q}_l(n))) = 0, \tag{2.5}$$

従って $\mathrm{F}^2\mathrm{H}^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_l(n)) = 0$ となります ($\mathrm{cd}(K)=2$ に注意). ここでは l が K の剰余体の標数と素な場合のみ説明します (K が p 進体で $l=p$ の場合も p 進 Hodge 理論 [HK], [K], [Ts] によって証明できます). X が potentially good reduction を持てば, (2.5) は Deligne の定理 [D] 3.3.9 と局所体の Galois コホモロジーの Tate 双対性 [S] Chap. II, §5.2 から直ちに従います. X が potentially good reduction を持たなくても, (2.5) は de Jong の alteration に関する定理 [dJ] によって X が semi-stable reduction を持つ場合に帰着され, weight の議論によって証明できます. ([RZ] Satz 2.21, 2.23, [Sat], §3, (3,6) の議論を参照).

3. 有限性定理

K を局所体, X を K 上の非特異完備多様体, l は K の標数とは異なる素数とします. n は 2 以上の勝手な整数とします. この節では, 次の定理を証明します.

定理 15. X のサイクル写像

$$\mathrm{reg}^{n+1,n}_{l,X} : \mathrm{H}^{n+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Z}(n))_{\mathbb{Q}_l} \to \mathrm{H}^{n+1}_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_l(n))$$

に対して,

$$\mathrm{Im}(\mathrm{reg}^{n+1,n}_{l,X}) \cap \mathrm{F}^2\mathrm{H}^{n+1}_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_l(n)) = \{0\}$$

である. 但し, $\mathrm{F}^\bullet$ は Hochschild–Serre のスペクトル系列(2.2) によるフィルター付けを表す.

定理 8 はこの定理と §2 の命題 11, 定理 12 から従います. 定理 15 の証明には次の結果を用います.

定理 16 ([Sat] Theorem 0.1). 次の群:

$$\mathrm{N}^1\mathrm{H}^{n+1}_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n)) \cap \mathrm{F}^2\mathrm{H}^{n+1}_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n))$$

は有限である. ここで

$$\mathrm{N}^1\mathrm{H}^{n+1}_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n)) := \mathrm{Ker}\left(\mathrm{H}^{n+1}_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n)) \to \mathrm{H}^{n+1}_{\text{ét}}(K(X), \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n))\right),$$

$\mathrm{F}^\bullet$ は Hochschild–Serre のスペクトル系列

$$E_2^{p,q} = \mathrm{H}^p_{\mathrm{Gal}}(G_K, \mathrm{H}^q_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n))) \Longrightarrow \mathrm{H}^{p+q}_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n)) \tag{3.1}$$

によるフィルター付けを表す (下の写像 α^n_l を参照).

注意 17. (1) 一般には $\mathrm{N}^1\mathrm{H}^{n+1}_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n))$ も $\mathrm{F}^2\mathrm{H}^{n+1}_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n))$ も有限ではありません. つまり, 定理 16 は上の注意 14 とは全く違うケースを扱っています. 例えば, E を $\mathbb{Q}_p$ 上の Tate 曲線 $\mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{Q}_p}/q^{\mathbb{Z}}$ ($q \in \mathbb{Q}_p^\times$) とすると, 任意の素数 l に対して,

$$\mathrm{N}^1\mathrm{H}^3(E, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \simeq \mathbb{Q}_p^\times \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l, \quad \mathrm{F}^2\mathrm{H}^3_{\text{ét}}(E, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \simeq \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l$$

であることが分かります．最初の同型は E の不分岐類体論 [Sai] の帰結です．二つ目の同型は $E=\mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{Q}_p}/q^{\mathbb{Z}}$ という表示と $\mathbb{Q}_p$ の Galois コホモロジーの Tate 双対性 ([S] Chap. II, §5.2 参照) によって確かめることができます．

(2) 定理 16 は $\mathrm{ch}(k)=0$ かつ $n=2$ の場合に Salberger [Sal] によって既に証明されています．彼の証明方法は，問題を X が曲線の場合に帰着させ，局所体上の曲線の不分岐類体論を用いて証明するというものでした．今回の定理 16 の証明は $n=2$ の場合には別証明となっています．

先に定理 16 を認めて局所体 K 上の多様体 X のサイクル写像 $\mathrm{reg}_{l,X}^{n+1,n}$ に関して定理 15 を証明します:

"定理 16 $\Longrightarrow$ 定理 15" の証明. まず，

$$I := \mathrm{Im}(\mathrm{reg}_{l,X}^{n+1,n}) \cap \mathrm{F}^2\mathrm{H}_{\text{ét}}^{n+1}(X,\mathbb{Q}_l(n))$$

と置く．I は l-加除群であることに注意せよ．標準写像

$$\mathrm{H}_{\text{ét}}^{n+1}(X,\mathbb{Q}_l(n)) \to \mathrm{H}_{\text{ét}}^{n+1}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n)). \tag{3.2}$$

による I の像を考える．定義から直ちに $\mathrm{H}_{\mathcal{M}}^{n+1}(K(X),\mathbb{Q}(n))=0$ であるから，I の像は

$$\mathrm{N}^1\mathrm{H}_{\text{ét}}^{n+1}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n)) \cap \mathrm{F}^2\mathrm{H}_{\text{ét}}^{n+1}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n))$$

に含まれるが，この群は定理 16 により有限である．I は l-加除群であるから，写像 (3.2) による像は自明，つまり，核に含まれる．さらに，写像 (3.2) の核は 有限生成自由な $\mathbb{Z}_l$ 加群でこれは非自明な l-加除部分群を含んでいない．ゆえに I は自明である． □

定理 16 の証明の概略. 以下では，スキームのコホモロジーはエタールコホモロジー，体のコホモロジーは Galois コホモロジー (= スペクトラムのエタールコホモロジー) を表すことにします．次の合成写像を考えましょう:

$$\alpha_l^n : \mathrm{H}^2(K,\mathrm{H}^{n-1}(\overline{X},\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n))) \xrightarrow{f} \mathrm{H}^{n+1}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n)) \xrightarrow{g} \mathrm{H}^{n+1}(K(X),\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n)).$$

ここで最初の写像 f は Hochschild–Serre スペクトル系列 (3.1) と $\mathrm{cd}(G_K)=2$ という事実から引き起こされる写像で，$\mathrm{H}^{n+1}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n))$ の部分群 F^2 はこの像に他なりません．一方，部分群 N^1 は制限写像 g の核で定義されていました．従って，α_l^n の核が有限である事を示せば十分です．

幾つかの記号を導入します．K の整数環を O_K，剰余体を $\mathbb{F}$ で表します．de Jong の alteration に関する定理 [dJ] から，α_l^n の核の有限性の問題は X が semi-stable reduction を持つ場合に帰着されます．そこで以下では，X がこのようなモデル $\mathfrak{X}/O_K$ を持ち，さらに $l\neq \mathrm{ch}(\mathbb{F})$ であるとします (K が p 進体で $l=p(=\mathrm{ch}(\mathbb{F}))$ の場合は p 進 Hodge 理論 [HK] [K] [Ts] を用いて以下の議論の類似を辿ります: [Sat] §4 参照)．$\mathfrak{X}$ の特異ファイバー $\mathfrak{X}\otimes_{O_K}\mathbb{F}$ を Y で表します．$Y\otimes_{\mathbb{F}}\overline{\mathbb{F}}$ を $\overline{Y}$ で表します．$R^*\Psi\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l$ を消滅輪体のなす $\overline{Y}$ 上のエタール層，J^n (resp. $\overline{J}^n$) を Y の (resp. $\overline{Y}$ の) n 個の互いに異なる既約成分の交わり達の生成点の集合とします．

直感的には，エタールコホモロジー群 $\mathrm{H}^{n-1}(\overline{X},\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n))$ の重さ -2 の商 ($\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(1)$ の直和の部分群となるようなもの) を計算することが目標です．正確には，次の可換図式 ([Sat] (3.2)

参照):

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^2(K, \mathrm{H}^{n-1}(\overline{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n))) & \xrightarrow{\alpha_l^n} & \mathrm{H}^{n+1}(K(X), \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n)) \\ \gamma_l^n \downarrow & & \downarrow d_l^n \\ H^2\left(K, \bigoplus_{z \in \overline{J}^n} R^{n-1}\Psi\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n)_{\overline{z}}\right) & \xrightarrow{\beta_l^n} & \bigoplus_{x \in J^n} \mathrm{H}^1(x, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l), \end{array} \tag{3.3}$$

を構成し, β_l^n が単射 (loc. cit. (3.3)–(3.4)), かつ γ_l^n の核が有限 (loc. cit. Lemma 3.2) である事を証明します. これらの計算において Rapoport-Zink の結果 [RZ], Satz 2.21, 2.23 及び Deligne の結果 [D], Corollaire 3.3.9 が重要な役割を果たします. さらには, Gabber の結果 [Ga] によって γ_l^n は殆ど全ての素数 l ($\neq \mathrm{ch}(\mathbb{F})$) に関して単射になることも分かり, 従って定理 16 の群は殆ど全ての l で自明になることが分かります. ([Sat], Lemma 3.2).

注意 18. Jannsen の Hasse 原理 ([J1] Theorem 3) 及び Theorem 16 から代数体 k 上の勝手な非特異完備多様体 X と整数 $n \geq 2$ に対して, 次の群:

$$\mathrm{N}^1\mathrm{H}^{n+1}_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n)) \cap \left(\mathrm{F}^2\mathrm{H}^{n+1}_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n))\right)_{\mathrm{div}}$$

が有限である事も分かります ([Sat],§2).

References

[B1] Bloch, S.: Algebraic cycles and higher K-theory. Adv. Math. **61**, 267–304 (1986)

[B2] ———: Algebraic cycles and the Beilinson conjectures. In: The Lefschetz Centennial Conference. (Contemp. Math. 58 Part I, pp. 65–79) Providence: AMS 1986

[D] Deligne, P.: La conjecture de Weil II. Publ. Math., IHES **52**, 137–252 (1980)

[Ga] Gabber, O.: Sur la torsion dans la cohomologie l-adique d'une variété. C. R. Acad. Sc. Paris Série I **297**, 179–182 (1983)

[GrSu] Gros, M., Suwa, N.: Application d'Abel-Jacobi p-adique et cycles algébriques. Duke Math. J. **57**, 579–613 (1988)

[HK] Hyodo, O., Kato, K.: Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles. In: Périodes p-adiques. Séminaire de Bures, 1988. (Astérisque 223, pp. 221–268): Soc. Math. France 1994

[J1] Jannsen, U.: On the l-adic cohomology of varieties over number fields and its Galois cohomology. In: Ihara, Y., Ribet, K.A., Serre, J.-P. (eds.) Galois Group over $\mathbb{Q}$. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag 1989

[J2] ———: Mixed motives and algebraic K-theory. LNM 1400, Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag 1990

[dJ] de Jong, A. J.: Smoothness, semi-stability, and alterations. Publ. Math., IHES **83**, 51–93 (1996)

[K] Kato, K.: Semi-stable reduction and p-adic etale cohomology. In: Périodes p-adiques. Séminaire de Bures, 1988. (Astérisque 223, pp. 269–293): Soc. Math. France 1994

[MS] Merkur'ev, A. S., Suslin, A. A.: K-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism. Math. USSR Izv. **21**, 307–341 (1983)

[N] Nekovář, J.: Syntomic cohomology and p-adic regulators. preprint

[RZ] Rapoport, M., Zink, T.: Üeber die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten. Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Charakteristik. Invent. Math. **68**, 21–101 (1982)

[Ras] Raskind, W.: Higher l-adic Abel-Jacobi mappings and filtraions on Chow groups. Duke Math. J. **78**, 33–57 (1995)

[Sai] Saito, S.: Class field theory for curves over local fields. J. Number Theory **21**, 44–80 (1985)

[Sal] Salberger, P.: Torsion cycles of codimension two and l-adic realizations of motivic cohomology. In: David, S. (ed.) Séminaire de Théorie des Nombres 1991/92 Boston: Birkhäuser 1993

[Sat] Sato, K.: Abel–Jacobi mappings and finiteness of motivic cohomology groups. preprint

[S] Serre, J.-P.: Cohomologie Galoisienne. (Lecture Notes in Math. 5) Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1965

[So] Soulé, C.: Groupes de Chow et K-théorie de variétés sur un corps fini. Math. Ann. **268**, 317–345 (1984)

[Ts] Tsuji, T.: p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case. preprint

[EGA4] Grothendieck, A., Dieudonné, J.: Étude locale des schémas et des morphismes de schémas (Eléments de Géométrie Algébrique IV). Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **20** (1964), **24** (1965), **28** (1966), **32** (1967)

[SGA4$\frac{1}{2}$] Deligne, P. et al.: Cohomologie Étale. (Séminaire de Géométrie Algébrique 4$\frac{1}{2}$, LNM 569) Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1977

[SGA7] Grothendieck, A., Deligne, P., Katz, N.: Groupes de monodromie en géométrie algébriques. (Séminaire de Géométrie Algébrique 7, LNM 288, 340) Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1972–73

日本学術振興会特別研究員 (PD)
東京工業大学理学部数学教室所属
152-8552 東京都目黒区大岡山 2 丁目 12 番地の 1
E-mail address: `kanetomo@ms406ss5.ms.u-tokyo.ac.jp`